四元数値関数の時間周波数解析　　芦野隆一（大阪教育大学）

アイルランド生まれの数学者ウィリアム・ローワン・ハミルトン (William Rowan Hamilton）は力学に興味を持ち，平面上の運動（平行移動と回転）が複素数で表現されることに注目し，空間の運動（平行移動と回転）が表現できる複素数の一般化である超複素数 (hyper complex numbers) の研究に没頭した．ハミルトンは，ついにダブリンのブルーム橋を散歩中に四元数 (quaternion) の着想を得た．四元数はハミルトンに因んで $\mathbb{H}$ と表される．

現在では，四元数は純粋数学のみならず応用数学，特に 3D グラフィクスやアニメーション，さらにコンピュータビジョン，航空機のナビゲーションにおいて，三次元空間における一連の平行移動や回転を高速で計算することができる．

カラーのデジタル画像は，Red, Green, Blue の 3 色で表すことができる．そこで，これらの値のなすベクトル (r, g, b) を四元数の虚数部分 (q_i, q_j, q_k) に対応させると，カラー画像は四元数値関数と見なせる（[1] を参照）．このため，カラーのデジタル画像を解析をするための四元数値関数の様々なフーリエ解析が考えられてきた．このとき，3 つの虚数単位 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ の非可換性から，1 変数複素数値関数のフーリエ変換を定義する基本的な波形 $e^{-\mathbf{i}\omega x}$ をどのようにとるべきかが問題となる．

ここでは，両側四元数フーリエ変換（[2] を参照）と右側四元数フーリエ変換（[3] を参照）の定義を紹介し，これらの四元数フーリエ変換に関するいくつかの注意を述べる．

定義 1 (両側四元数フーリエ変換)**.** 四元数値関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ に対して，f の両側四元数フーリエ変換 $\mathcal{F}_{Q,b}\{f\}$ を

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{Q,b}\{f\}(\boldsymbol{\omega})\\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\mathbf{i}\omega_1 x_1}\, f(\boldsymbol{x})\, e^{-\mathbf{j}\omega_2 x_2}\, d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

で定義する．

複素数値関数に対する内積をそのまま四元数値関数に拡張した場合，パーセヴァルの定理は成立しないが，以下に定義する対称実スカラー積についてはパーセヴァルの定理が成立する．

定義 2 (対称実スカラー積)**.** 対称実スカラー積を

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\overline{g(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) \overline{g(\boldsymbol{x})}\right) d\boldsymbol{x}\\ &= Sc \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x}) \overline{g(\boldsymbol{x})}\, d\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

で定義する．

定義 3 (L^p-ノルム).

$$|f| = \sqrt{f_0^2(\boldsymbol{x}) + f_1^2(\boldsymbol{x}) + f_2^2(\boldsymbol{x}) + f_3^2(\boldsymbol{x})}$$

とおき，L^p-ノルムを

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{x})|^p \, d\boldsymbol{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

で定義する．

定理 4 (両側四元数フーリエ変換に関するスカラーパーセヴァルの定理). $f,\ g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ に対して，

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})} = \langle \mathcal{F}_{Q,b}\{f\}, \mathcal{F}_{Q,b}\{g\} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})}$$

が成り立つ．特に，$f = g$ のとき，プランシュレルの定理

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})} = \|\mathcal{F}_{Q,b}\{f\}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{H})}.$$

が成り立つ．

定義 5 (右側四元数フーリエ変換). $f \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ に対して，f の右側四元数フーリエ変換 $\mathcal{F}_{Q,r}\{f\}$ を

$$\mathcal{F}_{Q,r}\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x}) \, e^{-\mathbf{i}\omega_1 x_1} \, e^{-\mathbf{j}\omega_2 x_2} \, d\boldsymbol{x}$$

で定義する．

定義 6 (右側四元数逆フーリエ変換). $g \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ に対して，g の右側四元数逆フーリエ変換を

$$\mathcal{F}_Q^{-1}[g](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \int_{\mathbb{R}^2} g(\boldsymbol{\omega}) \, e^{\mathbf{j}\omega_2 x_2} \, e^{\mathbf{i}\omega_1 x_1} \, d\boldsymbol{\omega}$$

で定義する．

参考文献

[1] Todd A Ell, Stephen J Sangwine, Hypercomplex Fourier transforms of color images, IEEE Transactions on Image Processing, **16**(1), 22–35, 2007.

[2] M. Bahri and R. Ashino, Duality property of two-sided quaternion Fourier transform, 2018 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR).

[3] M. Bahri and R. Ashino, Some useful results associated with right-sided quaternion Fourier transform, 2018 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR).