不完全投影データからの新たなCT画像再構成について

藤井克哉

1　不完全投影データ再構成問題

従来，CT 画像再構成と呼ばれる手法は，大まかに言えばラドン変換と呼ばれる積分作用素の逆変換公式を導出することと同値である．ラドン変換とは，

$$\mathcal{R}f(t,\theta)=\int_{\mathbf{R}}f(t\theta+p\theta^{\perp})dp=\int_{\mathbf{R}^2}f(x)\delta(x\cdot\theta-t)dx \tag{1}$$

で定義される．ここで θ は単位ベクトル，$\theta^{\perp}$ は θ に直交する単位ベクトルであり，δ は 1 次元デルタ関数である．定義からラドン変換は，2 次元上の物体の線積分を表し，線積分によって X 線が減衰する様子を表現している．ラドン変換の像空間はサイノグラムと呼ばれており，P で表す．(1) の逆変換公式は，以下で与えられる [2].

$$f(x)=\int_0^{2\pi}\mathcal{H}\partial_t\mathcal{R}f(t,\theta)\Big|_{t=x\cdot\theta}d\theta \tag{2}$$

ここで，$\mathcal{H}$ はヒルベルト変換とよばれる特異積分作用素である．この公式によれば，再構成される $f(x)$ は，すべての $(t,\theta)\in\mathbf{R}\times S^1$($S^1$ は単位球面) に関して $\mathcal{R}f$ の情報（言い換えれば**完全なサイノグラム** P）が必要となる．しかしながら実際には工学的，医学的な観点から，得られる（欠損のある）サイノグラム A は多くの場合 $A\subset P$ となり，完全な逆変換を構成することが難しい．

そこで，考察対象となる問題を厳密な再構成公式を導出する問題から，逆問題としての解の一意性，安定性の問題に置き換える．解の一意性とは，いわゆる単射性の問題で再構成した解の正しさを保証し，安定性とは逆変換の連続性を表し，実際にはノイズに対してのロバスト性に対応している．これらの問題を一般のサイノグラム A に対して扱うにはかなり複雑になるため，今日までに考察されている欠損のある投影データ再構成問題を紹介する．サイノグラム A が，角度方向 θ には十分あり検出器方向 t に関して外側欠損している問題をインテリア問題，内側欠損している問題をエクステリア問題と呼ばれており，逆に検出器方向 t が十分あり，角度方向 θ に欠損している問題を角度制限問題と呼ばれている．以下の図に一意性と安定性の表を纏めた [2-4]. 詳細は講演時に考察したい.

投影データ欠損問題	解の一意性	安定性
インテリア問題	物体内部に既知の領域があれば成立	既知の領域の側では安定
エクステリア問題	成立	安定でない
角度欠損問題	成立	安定でない

Figure 1: よく知られた不完全投影データ問題の解の一意性と安定性

2　再構成の例

この節では，前節で紹介したインテリア問題の再構成の例を実際の脳の CT データを用いて紹介する．再構成法は，講演の際に紹介したい．

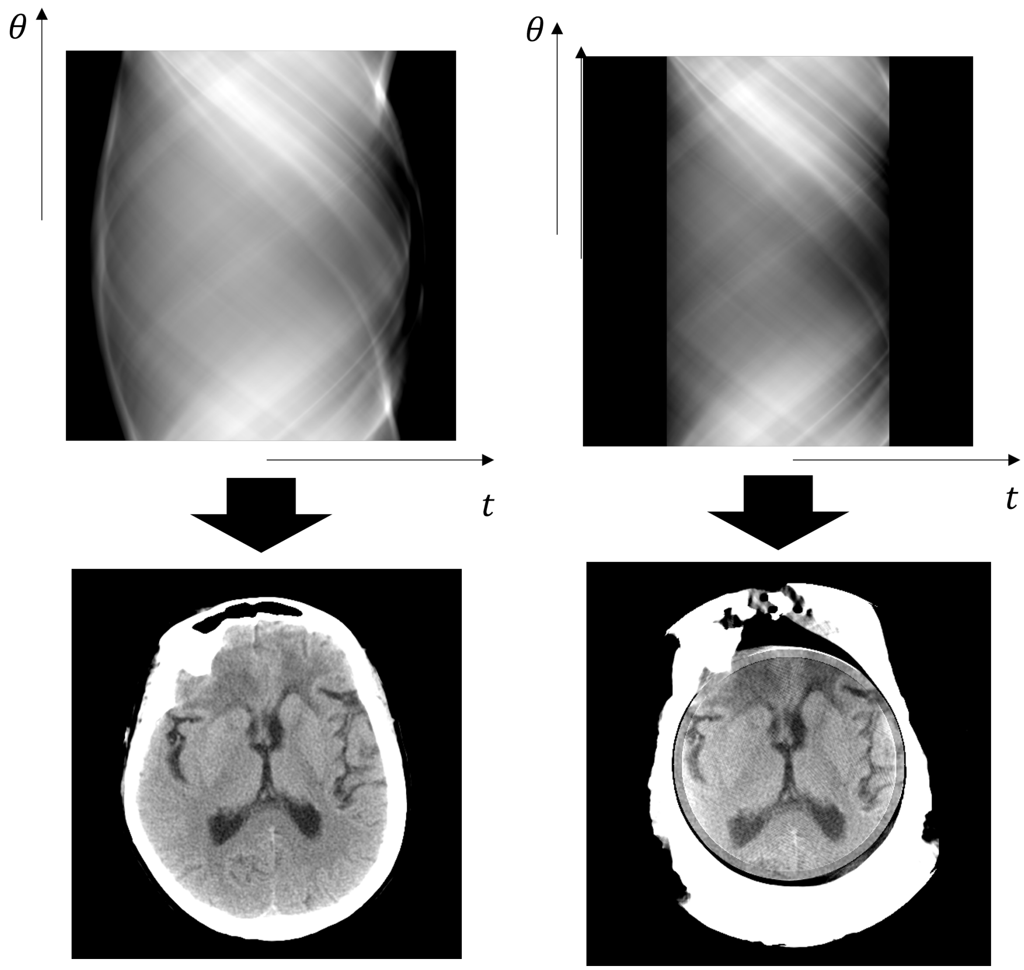

Figure 2: 左側は完全なサイノグラムからの再構成，右側はインテリア問題での再構成

References

[1] F. Natterer, The Mathematics of Computerized Tomography (second edition), SIAM (Classics in Applied Mathematics, Vol32), Philadelphia, PA, (2001).

[2] H. Kudo, M. Courdurier, F. Noo, M. Defrise, Tiny A Priori Knowlede Solves the Interior Problem in Computed Tomography, Phys. Med. Biol. **53** (2008), 2207-31.

[3] M. Courdurier, F. Noo, M. Defrise, H. Kudo, Solving the interior problem of computed tomography using a priori knowledge, *Inverse Problems*, **24**, (2008), 065001 (27pp).

[4] A. M. Cormack, Representations of a function by its line integrals with some radiological applications, J. Appl. Phys. **34** (1963), 2722-27.