# ウェーブレットフレーム

木下 保（筑波大学 数理物質系）

ヒルベルト空間としてはルベーグ積分を用いて内積を導入したベクトル空間 $L^2$ がよく考えられ、内積とノルムは次で与えられる。

$$(x,y)=\int x(t)\overline{y(t)}dt,\quad \|x\|=\sqrt{\int |x(t)|^2dt}$$

ヒルベルト空間 $X$ が正規直交基底 $\{\mathbf{e}_k\}_k$ を持つならば

$$x(t)=\sum_k (x,\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k(t)\ \text{ for all } x\in X$$

のように関数 $x$ が展開され、しかも次のパーセヴァルの等式が成り立つ。

$$\|x\|^2=\sum_k \left|(x,\mathbf{e}_k)\right|^2\ \text{ for all } x\in X$$

## 1.1 Parseval frame

正規直交基底 $\{\mathbf{e}_k\}_k$ だけとは限らず、一般に $\{\mathbf{v}_k\}_k$ がパーセヴァルの等式

$$\|x\|^2=\sum_k \left|(x,\mathbf{v}_k)\right|^2\ \text{ for all } x\in X$$

を満たすとき、Parseval frame と呼ぶ。簡単のため 2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の frame を紹介する。

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{3} \left|(x,\mathbf{v}_k)\right|^2\ \text{ for all } x\in \mathbf{R}^\mathbf{2}$$

最も有名な Parseval frame の例は、いわゆる Mercedes-Benz frame である。

$$\mathbf{v}_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-1/2\\-\sqrt{3}/2\end{pmatrix}.$$

このとき、$\|\mathbf{v}_k\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\ (\leq 1)$ であり、次がわかる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} \big|(x, \mathbf{v}_k)\big|^2 &= \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}x_1\Big)^2 + \Big\{\Big(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{x_1}{2}\Big)^2 + \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{3}x_2}{2}\Big)^2\Big\} \\ &\quad + \Big\{\Big(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{x_1}{2}\Big)^2 + \Big(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{3}x_2}{2}\Big)^2\Big\} \\ &= x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$

### 1.2 Wavelet frame

直交 Wavelet というのは、平行移動 $k$ と伸縮拡大 $j$ を表す 2 種類の離散的なパラメータを持つ関数

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$$

からなる正規直交基底 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ である。本講演では、正規直交基底を frame へと一般化して考えた場合を「Wavelet frame」と呼ぶことにして、具体的な構成法などを解説する。

## References


[1] 芦野隆一, 山本 鎮男, ウェーブレット解析—誕生・発展・応用, 共立出版 (1997).

[2] 新井仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館 (2010).

[3] 山田 道夫, 萬代 武史, 芦野 隆一, 応用のためのウェーブレット, 共立出版 (2016)

[4] E. Hernandez and G. L. Weiss, A First Course on Wavelets, CRC Press, New York, 1996.