

分散型写像流の幾何解析

千原浩之

筑波大学 数理物質系 数学域

第3回 数理連携サロン
2015年6月18日

Contents

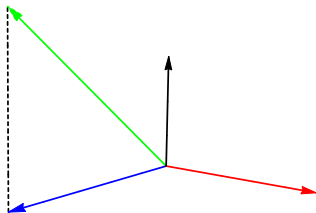
1. 古典物理学に現れるモデル
2. シュレーディンガー写像の方程式
3. その他のモデルと幾何学的一般化
4. 分散型写像流の研究

1-1. 古典物理学に現れるモデル（数式の読み方）

$$\vec{u}_t = \vec{u} \times \vec{u}_{xx}, \quad (1)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto \vec{u}(t, x) \in S^2.$$

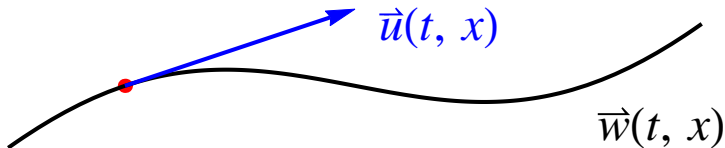
- \vec{u} は2次元球面 S^2 上の点を表すだけでなく、その点における単位法線ベクトルでもある。
- $\vec{u} \times \vec{u}_{xx} = \vec{u} \times (\vec{u}_{xx})^T$,
ここに、 $(\vec{u}_{xx})^T \in T_{\vec{u}(t,x)}S^2$ は \vec{u}_{xx} の \vec{u} における接成分である。
- $\{\vec{u}, (\vec{u}_{xx})^T, \vec{u} \times (\vec{u}_{xx})^T\}$ は $(\vec{u}_{xx})^T \neq \vec{0}$ である限り右手系の直交系である：



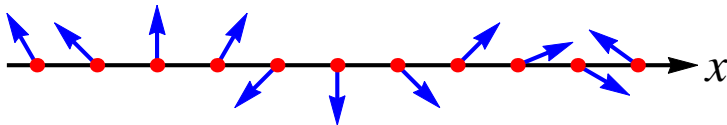
1-2. 古典物理学に現れるモデル（何のモデルか？）

偏微分方程式系 (1) は以下のモデルである：

- 渦系の運動 (Da Rios, 1906),
ここに, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ は弧長, $\vec{u} = \vec{w}_x$,
 $\vec{w}(t, \cdot)$ は時刻 t における渦系の曲線を表す.



- ハイゼンベルクの強磁性体方程式（古典スピン系の連続極限）.



1-3. 古典物理学に現れるモデル (偏微分方程式の構造)

偏微分方程式系 (1) はどのような偏微分方程式系であろうか？

もし $\vec{u}(t, \mathbf{x})$ がある 1 点, 例えば, 北極 $(0, 0, 1) \in S^2$ に値をとらないならば, 偏微分方程式系 (1) は半線型シュレーディンガー方程式になる:

$$v_t - \sqrt{-1} v_{xx} = \frac{2\sqrt{-1}\bar{v}(v_x)^2}{1 + |v|^2} \quad (2)$$

ここに, v は立体射影である:

$$S^2 \ni \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \mapsto v = \frac{u_1 + \sqrt{-1}u_2}{1 - u_3} \in \mathbb{C}.$$

(2) の解は物理学においては面白くない解であろう。

特に (2) の小さい解は定値写像に近いのでつまらない解である。

2. シュレーディンガー写像の方程式

偏微分方程式系 (1) は以下のように一般化される :

$$u_t = \mathbf{J}(u)\tau(u) \quad \text{in } \mathbb{R} \times M. \quad (3)$$

ここに, $u: \mathbb{R} \times M \rightarrow N$, (M, g) は m -次元閉リーマン多様体, (N, J, h) は $2n$ -次元コンパクト概エルミート多様体, $\tau(u)$ は写像 $u(t, \cdot): M \rightarrow N$ のテンション場で, 粗く言えば,

$$\tau(u)(t, x) = \Delta_g u(t, x) \text{ の } T_{u(t,x)}N \text{ への射影.}$$

偏微分方程式 (3) の解はシュレーディンガー写像とよばれる.
(3) の定常解は $\tau(u) = \mathbf{0}$ の解であり調和写像とよばれる.

以下では主に $m = 1$ の場合, すなわち, $M = \mathbb{R}$ または \mathbb{R}/\mathbb{Z} の場合を考える. 粗く言えば, 曲面のようなものの上の曲線運動の偏微分方程式を考える.

3. その他のモデルと幾何学的一般化

モデル (1) やその高階版を幾何学的に一般化して考察すると、偏微分方程式が扱いやすくなり、構造や本質がよく理解できることが少なくない。これらのモデルは以下のように幾何学的に一般化される：

$$u_t = J_u \nabla_x u_x, \quad (4)$$

$$u_t = J_u \nabla_x u_x + a \nabla_x^2 u_x + b h_u(u_x, u_x) u_x, \quad (5)$$

$$u_t = J_u \nabla_x u_x + a J_u \nabla_x^3 u_x + b h_u(u_x, u_x) J_u \nabla_x u_x + c h_u(\nabla_x u_x, u_x) J_u u_x, \quad (6)$$

ここに、 $a, b, c \in \mathbb{R}$ は定数であり、特に $a \neq 0$ である。 ∇_x は写像 u に沿う共変微分とよばれるが、粗く言えば、

$$\nabla_x u = u_x(t, x) \text{ の } T_{u(t,x)} N \text{ 成分.}$$

流体力学分野（渦糸）と非線型波動分野（古典スピン系）の双方で (1) の 3 階版と 4 階版が提案されているが、全く同じモデルになっている。

4-1. 分散型写像流の研究 (概略)

- 現在までの研究は, 見かけ上は
 - ▶ 偏微分方程式の幾何学的簡略化
 - ▶ 初期値問題の解法

の2つに分かれるが, 線型偏微分方程式論の観点から見ると, これらは目的は異なるものの本質的には同じ研究である, と言ってよい.

- 初期値問題の解法の研究においては, 適当な $m = 1, 2, 3, \dots$ に対して

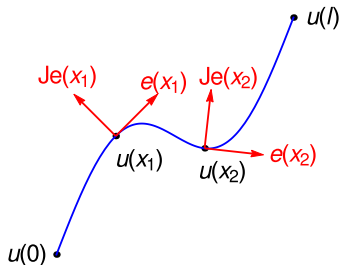
$$\sum_{k=0}^m \int h_{u(t,x)} (\nabla_x^k u_x(t,x), \nabla_x^k u_x(t,x)) dx$$

のような量を調べる. 標的多様体の曲率条件から, このような量が非増大であることがしたがって, 時間局所解が時間大域的に延長されることがしたがうことが多い.

- 解の長時間挙動や爆発 (曲線の破綻) などの解の詳しい挙動についての研究は全くない. (散乱理論のようなもの等の構築は一筋縄ではできそうにない.)

4-2. 分散型写像流の研究 (幾何学的簡略化)

リーマン面上の曲線運動の場合に, 曲線に沿う接束 TN の標構場 $\{\mathbf{e}, \mathbf{J}\mathbf{e}\}$ を構成して, 適当な階数の導関数 $\nabla_x^j \mathbf{u}_x$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) を $\mathbf{V}\mathbf{e} + \mathbf{W}\mathbf{J}\mathbf{e}$ の形で表し, $\mathbf{V} + \sqrt{-1}\mathbf{W}$ または ${}^t(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ のみたす偏微分方程式を導く.



- \mathbf{e} は平行移動 $\nabla_x \mathbf{e} = 0$ と定める. $\nabla_x \mathbf{J}\mathbf{e} = 0$ もしたがう.
- Chang-Shatah-Uhlenbeck (2000): (4), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$.
橋本英典の変換 (1972).
- Onodera (2008): (5) と (6), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$.
- C (2015): (6), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 可解性には $\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \text{const}$ が必要か?

4-3. 分散型写像流の研究（初期値問題の解法）

一般に、空間変数 \mathbf{x} の動く範囲がコンパクトである問題設定の方が初期値問題が解けにくくなる。閉曲線の場合 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を中心に述べる。

● 2 階の方程式 (4) 等

- ▶ Koiso (1995): $(\mathbf{N}, \mathbf{J}, h)$ コンパクトなケーラー多様体 ($\nabla^{\mathbf{N}} \mathbf{J} = \mathbf{0}$). 時間局所解, $\nabla^{\mathbf{N}} \mathbf{R} = \mathbf{0} \implies$ 時間大域解.
- ▶ C (2013): (3). 時間局所解.

● 3 階の方程式 (5)

- ▶ Onodera (2008): $(\mathbf{N}, \mathbf{J}, h)$ コンパクトなケーラー多様体 ($\nabla^{\mathbf{N}} \mathbf{J} = \mathbf{0}$). 時間局所解, $\mathbf{K} = 2\mathbf{b}/\mathbf{a} \implies$ 時間大域解.
- ▶ C-Onodera (2009): $(\mathbf{N}, \mathbf{J}, h)$ コンパクトな概エルミート多様体. 時間局所解.

● 4 階の方程式 (6)

- ▶ Onodera (投稿準備中): $(\mathbf{N}, \mathbf{J}, h)$ コンパクトな定曲率リーマン面. 時間局所解.

4-4. 分散型写像流の研究 (標的多様体のケーラー性)

$a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ とする. シュレーディンガー発展方程式

$$v_t - \sqrt{-1} v_{xx} + a(x) v_x = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

に対する初期値問題が一意的可解であるための必要十分条件は

$$\int_0^1 \operatorname{Im} a(x) dx = 0$$

である. 実際

$$w(t, x) = v(t, x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^x \operatorname{Im} a(y) dy\right)$$

は次をみたすので, 初期値問題は一意可解であることがわかる:

$$w_t - \sqrt{-1} w_{xx} + \{\operatorname{Re} a(x)\} w_x + b(x) w = 0.$$

シュレーディンガー写像の方程式 (4) $u_t = J(u) \nabla_x u_x$ は (N, J, h) がケーラー多様体であるとき上と同様の構造になっており, 特に (N, J, h) がリーマン面であるとき, 標構場の構成に登場した $\nabla_x e = 0$ を考えることは, 変換 $v \mapsto w$ を考えることと本質的に同じことである.