精度保証付き数値計算を利用する偏微分方程式の解の数値的検証法

高安 亮紀

筑波大学

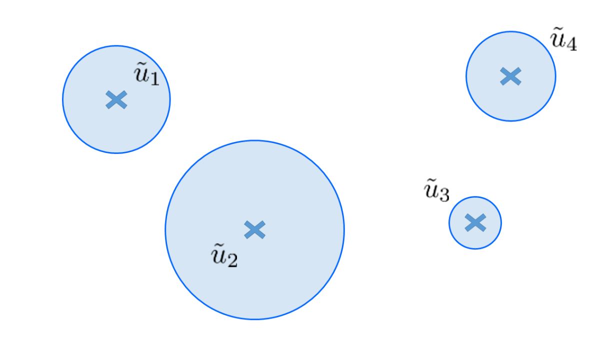
第 3 回 RCMS サロン「精度保証付き数値計算の有用性」

2018 年 12 月 12 日

（偏微分方程式における）精度保証付き数値計算...

数学的に正しい結果を数値計算によって導く手法全般.
数値計算結果の品質保証だけでなく, 計算機を援用する数学解析手法も「精度保証付き数値計算」と呼ぶ.

偏微分方程式に対する解の精度保証付き数値計算法は数値計算で得られた近似解の近傍で, 適切な（かつ計算機で表現可能な）関数空間の部分集合を作り, その集合において不動点定理の成立を数値検証する.



精度保証付き数値計算（PDE）

微分方程式論の研究として...

1980 年後半から 90 年代初頭の M. T. Nakao, M. Plum による有限要素法を用いた理論を筆頭* に数多くの偏微分方程式（主に境界値問題）の解が精度保証されている.

最近の動向...

P. Zgliczyński, K. Mischaikow (2001) の論文を皮切りに力学系の研究者が爆発的に成果を発表. 特に, J.-P. Lessard らが “radii polynomial approach” という統一的なフレームワークで無限次元力学系の平衡点（定常解）, 進行波解, 周期解などを次々と証明.

*N. Yamamoto, Y. Watanabe, K. Nagatou, T. Minamoto, K. Hashimoto, T. Kinoshita, T. Kimura, S. Kimura, K. Hayakawa, K. Gemma, K. Toyonaga, T. Morifuji, Y. Nishimura, R. Abe, T. Uda, H. Okamoto, K. Kobayashi, T. Tsuchiya, T. Nishida, T. Kawanago, M. Kim, M. Wakayama, T. Miyaji, K. Matsue, T. Kubo, F. Kikuchi, X. Liu, K. Sekine, M. Mizuguchi, K. Tanaka, M.Kashiwagi, S. M. Rump, S. Oishi, etc.

精度保証付き数値計算（PDE）

微分方程式論の研究として...

1980 年後半から 90 年代初頭の M. T. Nakao, M. Plum による有限要素法を用いた理論を筆頭[*] に数多くの偏微分方程式（主に境界値問題）の解が精度保証されている.

最近の動向...

P. Zgliczyński, K. Mischaikow (2001) の論文を皮切りに力学系の研究者が爆発的に成果を発表. 特に, J.-P. Lessard らが "radii polynomial approach" という統一的なフレームワークで無限次元力学系の平衡点（定常解）, 進行波解, 周期解などを次々と証明.

---

[*]N. Yamamoto, Y. Watanabe, K. Nagatou, T. Minamoto, K. Hashimoto, T. Kinoshita, T. Kimura, S. Kimura, K. Hayakawa, K. Gemma, K. Toyonaga, T. Morifuji, Y. Nishimura, R. Abe, T. Uda, H. Okamoto, K. Kobayashi, T. Tsuchiya, T. Nishida, T. Kawanago, M. Kim, M. Wakayama, T. Miyaji, K. Matsue, T. Kubo, F. Kikuchi, X. Liu, K. Sekine, M. Mizuguchi, K. Tanaka, M.Kashiwagi, S. M. Rump, S. Oishi, etc.

精度保証付き数値計算（PDE）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$: Banach 空間, $F : X \to Y$

$$\text{Find } u \in X \text{ s.t. } F(u) = 0 \text{ in } Y.$$

$\tilde{u}$: 近似解, $B(\tilde{u}, \rho) := \{u \in X : \|u - \tilde{u}\|_X \le \rho\}$

$$\iff \text{Find } u \in B(\tilde{u}, \rho) \text{ s.t. } u = T(u),\ T : X \to X.$$

$z = u - \tilde{u}$ として

$$\iff \text{Find } z \in B(0, \rho) \text{ s.t. } z = S(z) (= T(z + \tilde{u}) - \tilde{u}).$$

関数空間 X, 作用素 T あるいは S を適切に選び, $B(\tilde{u}, \rho)$ 上での不動点定理の成立条件を数値検証可能な形に定式化.

精度保証付き数値計算（PDE）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$: Banach 空間, $F : X \to Y$

$$\text{Find } u \in X \text{ s.t. } F(u) = 0 \text{ in } Y.$$

$\tilde{u}$: 近似解, $B(\tilde{u}, \rho) := \{u \in X : \|u - \tilde{u}\|_X \le \rho\}$

$$\iff \text{Find } u \in B(\tilde{u}, \rho) \text{ s.t. } u = T(u),\ T : X \to X.$$

$z = u - \tilde{u}$ として

$$\iff \text{Find } z \in B(0, \rho) \text{ s.t. } z = S(z) (= T(z + \tilde{u}) - \tilde{u}).$$

関数空間 X, 作用素 T あるいは S を適切に選び, $B(\tilde{u}, \rho)$ 上での不動点定理の成立条件を数値検証可能な形に定式化.

精度保証付き数値計算（PDE）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$: Banach 空間, $F : X \to Y$

$$\text{Find } u \in X \text{ s.t. } F(u) = 0 \text{ in } Y.$$

$\tilde{u}$: 近似解, $B(\tilde{u}, \rho) := \{u \in X : \|u - \tilde{u}\|_X \le \rho\}$

$$\iff \text{Find } u \in B(\tilde{u}, \rho) \text{ s.t. } u = T(u),\ T : X \to X.$$

$z = u - \tilde{u}$ として

$$\iff \text{Find } z \in B(0, \rho) \text{ s.t. } z = S(z) (= T(z + \tilde{u}) - \tilde{u}).$$

関数空間 X, 作用素 T あるいは S を適切に選び, $B(\tilde{u}, \rho)$ 上での不動点定理の成立条件を数値検証可能な形に定式化.

精度保証付き数値計算（PDE）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$: Banach 空間, $F : X \to Y$

$$\text{Find } u \in X \text{ s.t. } F(u) = 0 \text{ in } Y.$$

$\tilde{u}$: 近似解, $B(\tilde{u}, \rho) := \{u \in X : \|u - \tilde{u}\|_X \le \rho\}$

$$\iff \text{Find } u \in B(\tilde{u}, \rho) \text{ s.t. } u = T(u),\ T : X \to X.$$

$z = u - \tilde{u}$ として

$$\iff \text{Find } \rho > 0 \text{ s.t. } \|S(z)\| \le \rho \text{ with contraction mapping } S.$$

関数空間 X, 作用素 T あるいは S を適切に選び, $B(\tilde{u}, \rho)$ 上での不動点定理の成立条件を数値検証可能な形に定式化.

精度保証付き数値計算（時間発展方程式）

X: Banach 空間, $\tilde{u}$: ある近似解. 初期時刻 $t = t_0$ において初期関数が $\|u(t_0) - \tilde{u}(t_0)\|_Z \le \varepsilon_0$ をみたすとき, 解の存在と局所一意性を $B_J(\tilde{u}, \rho)$ において計算機援用証明する.

Nakao, Kinoshita, Kimura (2012, 2013, 2014)

$X = L^2(J; H_0^1(\Omega))$, $Z = H_0^1(\Omega)$, $u_0 \equiv 0$.

Mizuguchi, T., **Kubo**, Oishi (2014)

$X = L^\infty(J; H_0^1(\Omega))$, $Z = H_0^1(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Mizuguchi, Sekine, T., **Kubo**, Oishi (2016)

$X = L^\infty(J; H_\sigma^1(\Omega))$, $Z = H_\sigma^1(\Omega)$, $u_0 \in H_\sigma^1(\Omega)$.

T., Mizuguchi, **Kubo**, Oishi (2017)

$X = C(J; D(\Delta_\Omega))$, $Z = L^2(\Omega)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$.

精度保証付き数値計算（時間発展方程式）

X: Banach 空間, $\tilde{u}$: ある近似解. 初期時刻 $t = t_0$ において初期関数が $\|u(t_0) - \tilde{u}(t_0)\|_Z \le \varepsilon_0$ をみたすとき, 解の存在と局所一意性を $B_J(\tilde{u}, \rho)$ において計算機援用証明する.

Nakao, Kinoshita, Kimura (2012, 2013, 2014)

$X = L^2\left(J; H_0^1(\Omega)\right)$, $Z = H_0^1(\Omega)$, $u_0 \equiv 0$.

Mizuguchi, T., **Kubo**, Oishi (2014)

$X = L^\infty\left(J; H_0^1(\Omega)\right)$, $Z = H_0^1(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

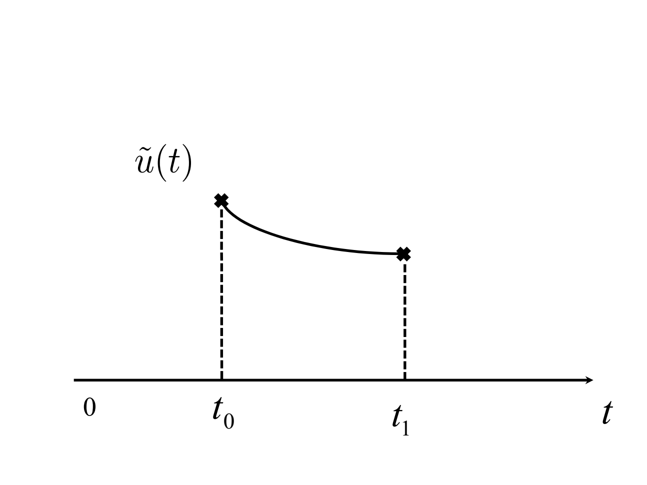
Mizuguchi, Sekine, T., **Kubo**, Oishi (2016)

$X = L^\infty\left(J; H_\sigma^1(\Omega)\right)$, $Z = H_\sigma^1(\Omega)$, $u_0 \in H_\sigma^1(\Omega)$.

T., Mizuguchi, **Kubo**, Oishi (2017)

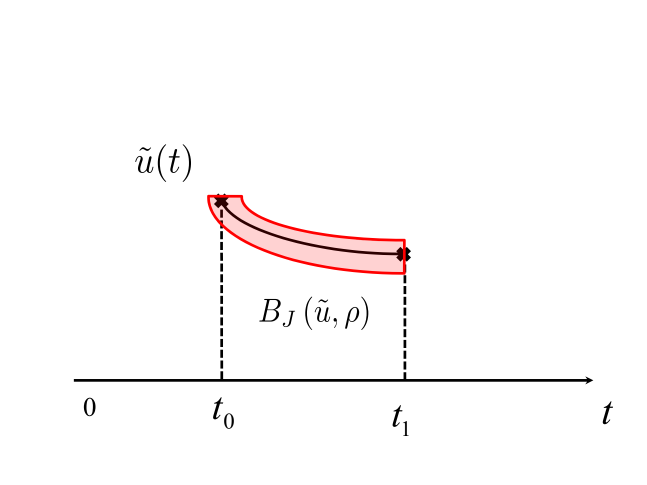
$X = C(J; D(\Delta_\mu^\alpha))$, $Z = L^2(\Omega)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$.

第 1 ステップ: 解の局所包含を Banach 空間 X で得る.



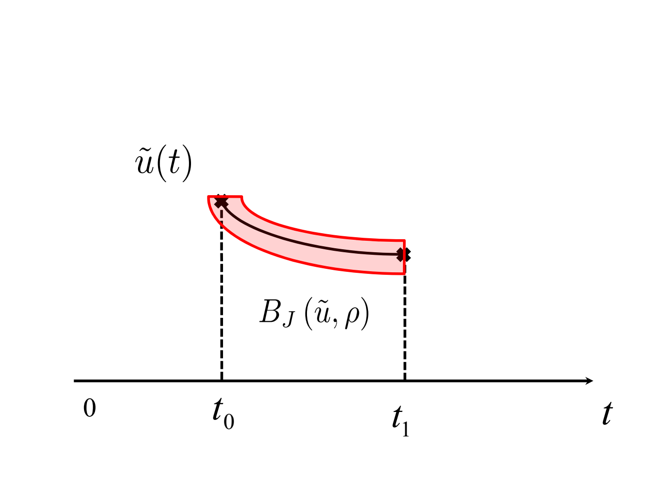
関数 $\tilde{u}(t) \equiv \tilde{u}(t, \cdot)$ は数値解をもとに構成する.

第 1 ステップ: 解の局所包含を Banach 空間 X で得る.



不動点定理をもとに真の解の局所包含を得る.

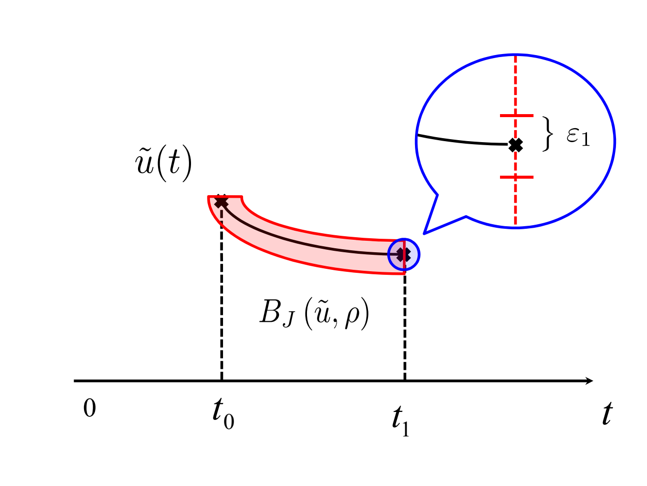
第 2 ステップ: $t = t_1$ における端点評価



局所包含が示された後, 端点評価を計算する.

$$\|u(t_1) - \tilde{u}(t_1)\| \le \varepsilon_1.$$

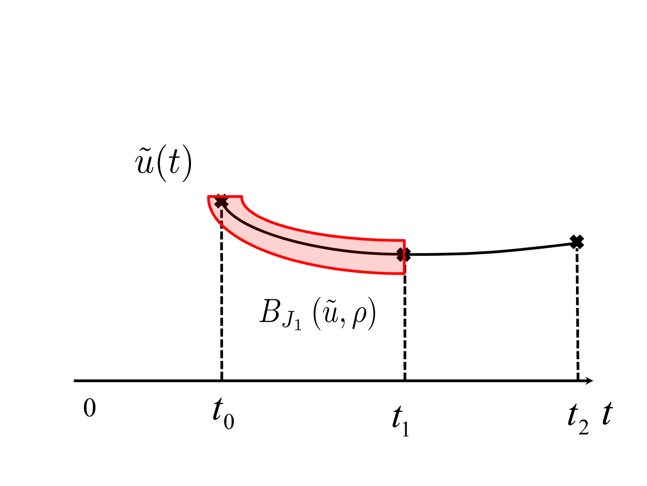
第 2 ステップ: $t = t_1$ における端点評価



局所包含が示された後, 端点評価を計算する.

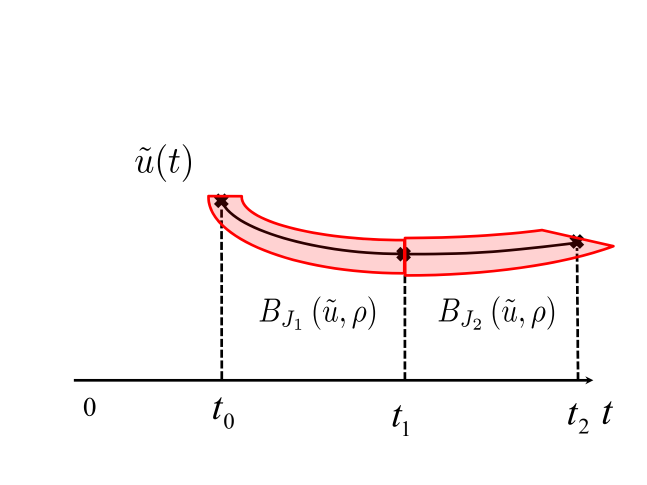
$$\|u(t_1) - \tilde{u}(t_1)\| \leq \varepsilon_1.$$

第 2 ステップ: $t = t_1$ における端点評価



その後, 近似解 $\tilde{u}(t, x)$ を $J_2 = (t_1, t_2]$ へと延長し,

第 2 ステップ: $t = t_1$ における端点評価



J_2 において再度, 局所包含定理の成立を確かめる.
すると解の存在が $J_1 \cup J_2$ に延長される.

ご静聴ありがとうございました